CURS III
Modelarea scurgerii în bazine hidrografice

Ecuaţiile mişcării într-un canal trapezoidal cu aport lateral

Scurgerea directă de pe bazin poate fi modelată matematic considerând conservarea masei şi momentului aplicate unui volum de control fixat în spaţiul iniţial (figura 1) [*Chow, 1981; Şerban et al, 1989; David, 1990; Stanciu, 2002*].

Ecuaţia de continuitate pentru scurgerea fluidului incompresibil este:

$$\iint_S \vec{V} dA = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V dv \tag{1}$$

iar ecuaţia momentului pentru un flux care traversează volumul de control V finit în spaţiul iniţial este:

$$\vec{F}_S + \iiint_V \vec{B} \rho dv = \iint_S \vec{V}\left(\rho \vec{V} dA\right) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{V}(\rho dv) \tag{2}$$

unde: S - suprafaţa exterioară a volumului de control; V - volumul de control; $\vec{V}$ - vectorul viteză; dA - elementul de suprafaţă; dv - elementul de volum; F_S - vectorul care reprezintă suma forţelor superficiale care acţionează asupra elementului de volum; B - vectorul care reprezintă suma tuturor forţelor masice; ρ - densitatea fluidului.

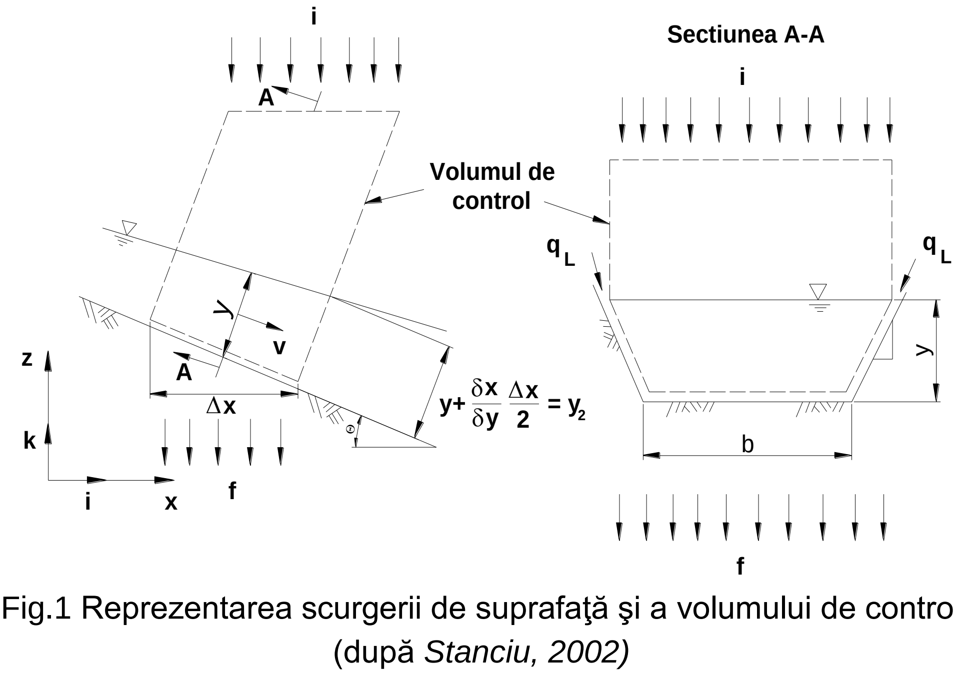

Fig.1 Reprezentarea scurgerii de suprafaţă şi a volumului de control (după *Stanciu, 2002)*

Pentru analiza scurgerii bidimensionale într-un canal prismatic pentru care volumul particular de control este prezentat în figura 2, se consideră următoarele ipoteze:

- viteza scurgerii de suprafaţă este variabilă cu adâncimea;
- vectorii vitezelor sunt paraleli cu fundul canalului – curgere laminară;
- viteza medie în oricare din secţiuni se calculează cu formula:

$$\vec{V} = V(i\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{\iint_S V dA}{\iint_S dA} \tag{3}$$

unde i şi k sunt vectorii unitate în direcţiile x, respectiv z, iar θ este unghiul pe care îl face fundul canalului cu orizontala;

- distribuţia presiunii este liniară cu adâncimea;
- scurgerea de suprafaţă are loc pe o suprafaţă de lăţime infinită şi poate fi considerată bidimensională (2D).

În aceste condiţii ecuaţiile mişcării pot fi formulate în termenul de viteză medie iar presiunea (a cărei distribuţie este prezentată în figura 2) este împărţită într-o componentă hidrostatică şi componenta suprapresiunii în exces care este cauzată de fluxul momentului în direcţie verticală.

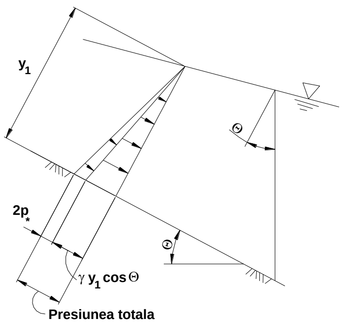

Fig.2 Distribuţia presiunilor (după *Stanciu, 2002)*

Modelul de tip fiziografic al scurgerii lichide pe versanţi

Are la bază conceptul că pentru sesizarea procesului real al scurgerii pe versant e nevoie de luarea în considerare a dinamicii elementelor de bilanţ hidric în fiecare punct din bazin, el a fost elaborat de Stanciu, Blidaru şi Drăgoi în anul 1976 [*Stanciu et al, 1976*]. Modelul presupune discretizarea suprafeţei bazinului hidrografic, determinarea hidrografului scurgerii pentru fiecare din suprafeţele elementare şi integrarea tuturor acestor hidrografe pentru întreg bazinul (figura 3).

Conceptul formării scurgerii superficiale pe un element de suprafaţă al bazinului considerat constă în divizarea ciclului scurgerii în mai multe componente. Fiecare din aceste componente poate fi incorporată independent în modelul general.

Componentele bilanţului de apă utilizate în modelul matematic sunt: ploaia, intercepţia, acumularea de suprafaţă, infiltraţia şi scurgerea superficială.

Modelul, cum se vede şi din schema logică prezentată în figura 3, se poate cupla cu modulele referitoare la scurgerea subterană şi scurgerea de aluviuni.

Reprezentarea geometrică a bazinului hidrografic într-un număr finit de elemente de suprafaţă (discretizarea bazinului hidrografic) (figura 4) se face astfel încât parametrii hidrologici importanţi (intensitatea ploii, intensitatea infiltraţiei, mărimea şi direcţia pantei, acoperirea cu vegetaţie) să fie constanţi în interiorul fiecărui element (pot însă varia într-o manieră complet nerestrictivă între elementele adiacente).

Scurgerea în interiorul fiecărui element se produce pe direcţia liniei de cea mai mare pantă a elementului respectiv. Acest procedeu presupune divizarea debitului în două componente, funcţie de divizarea suprafeţei elementului (figura 5) de direcţia liniei de cea mai mare pantă.

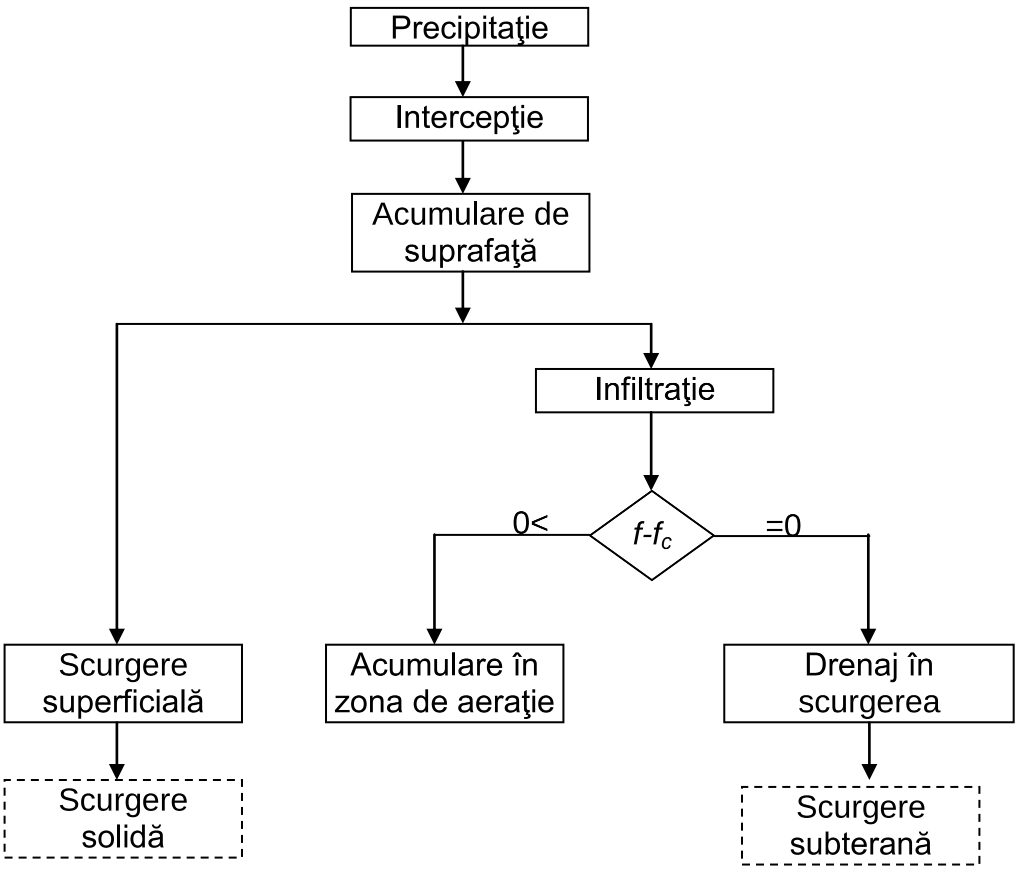

Fig.3 Schema logică a modelului (după *Stanciu, 1976)*

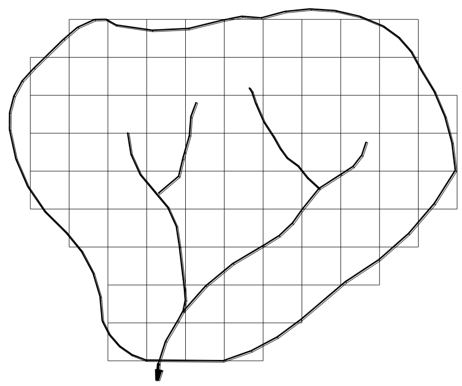

Fig.4 Discretizarea bazinului hidrografic (după *Stanciu, 2002)*

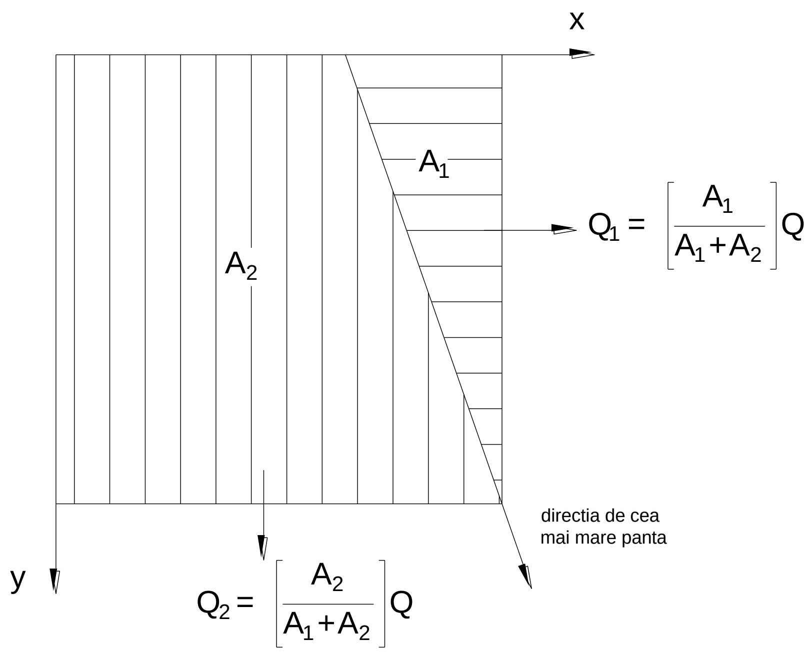

Fig.5 Condiţii ale scurgerii de suprafaţă în interiorul unui element
(după *Stanciu, 2002)*

Ecuaţiile modelului

Ecuaţiile modelului se obţin din ecuaţiile generale ale mişcării în condiţii particulare:

- mişcare unidimensională
- neglijarea termenilor inerţiali
- mişcarea se produce sub acţiunea forţei de frecare.

În aceste condiţii simplificate ecuaţiile modelului se scriu sub forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = i(x,t) - f(x,t)$$
$$q = q_x + q_y = K(\cos\theta + \sin\theta)h^{m+1} \tag{4}$$

unde: q_x şi q_y - sunt debitele în direcţia x şi y; K - este coeficient care depinde de pantă şi rugozitatea suprafeţei; θ - unghiul format pe suprafaţa elementului de direcţia cu cea mai mare pantă; i - intensitatea ploii; f - intensitatea infiltraţiei; m - exponent funcţie de gradul de turbulenţă al scurgerii (în general m = 0,67).
Pentru integrarea componentelor bilanţului de apă pe elementul de suprafaţă se foloseşte ecuaţia:

$$I - O = \frac{dV}{dt} \tag{5}$$

unde: I reprezintă intrările în elementul de suprafaţă; O - ieşirile din element; V - volumul apei acumulate pe element şi este disponibil pentru scurgere.
Debitul pentru elementul de suprafaţă se calculează cu formula:

$$q = u \cdot \bar{h} \cdot \Delta x + v \cdot \bar{h} \cdot \Delta x = K'\bar{h}^{m+1} \tag{6}$$

unde:

$$K' = K \cdot \Delta x \cdot (\cos\theta + \sin\theta) \tag{7}$$

$\bar{h}$ este adâncimea medie a scurgerii pe versant; Δx - dimensiunea elementului de suprafaţă pentru o reţea pătratică; u şi v sunt vitezele în direcţia x, respectiv y.
Pentru calculul infiltraţiei se foloseşte formula Holtan şi Overton scrisă sub forma:

$$f = f_c + A\left(\frac{S - F}{T_p}\right)^B \tag{8}$$

unde: f este capacitatea de infiltraţie la un moment dat t; f_c - capacitatea finală (infiltraţia stabilizată) de infiltraţie; S - capacitatea de acumulare a apei în stratul de sol activ care participă la formarea scurgerii superficiale; F - volumul total infiltrat; Tp - porozitatea totală a stratului de sol activ; A şi B sunt constante care se determină experimental. Constantele A şi B au fost determinate prin metoda celor mai mici pătrate, corelând valorile ($f - f_c$) cu valorile (S-F)/T obţinute pe cale experimentală cu ajutorul infiltrometrului mobil.

Datorită ipotezelor simplificatoare impuse la elaborarea modelului, acesta poate fi considerat ca o aproximaţie de ordinul 1 (model bidimensional hibrid) a modelului matematic bidimensional de formare a scurgerii pe versant.

Domeniu de aplicabilitate:

- modelul este unidimensional
- foloseşte un sistem de ecuaţii simplificate

- pe baza testării modelului de către autori pe parcele de scurgere, versanţi şi bazine hidrografice mici, a rezultat că modelul dă rezultate bune atunci când scurgerea de suprafaţă are loc în regim laminar, pentru regimul turbulent modelul dă rezultate eronate.

Modelul hidrodinamic complex al scurgerii pe versanţi

Modelul se bazează pe aplicarea principiilor conservării masei şi impulsului pentru descrierea proceselor hidrologice de la suprafaţa versantului şi din sol, cuprinzând mai multe submodele corespunzătoare diferitelor niveluri de acumulare a apei: intercepţia, scurgerea de pe versant şi din albie, zona nesaturată şi zona saturată [*Stanciu et al, 1988*].

Schema bloc a modelului cu principalele submodele se prezintă în figura 6.

Ecuaţiile modelului

Mişcarea pe versant se obţine în ipoteza că stratul vegetal care acoperă suprafaţa versanţilor poate fi aproximat cu un strat poros cu o permeabilitate si porozitate mare.

Considerând că toată cantitatea de ploaie netă intră în stratul poros folosind ecuaţia de continuitate şi legea lui Darcy se obţine următoarea ecuaţie de mişcare:

$$Kh\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+K\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\sin\alpha\right)\frac{\partial h}{\partial x}-\gamma\frac{\partial h}{\partial t}=r-f_i \qquad (9)$$

unde: K- este coeficientul de permeabilitate; h - adâncimea scurgerii; α - unghiul de înclinare a versantului; x - distanţa măsurată din partea amonte a versantului spre baza lui; t – timpul; γ – porozitatea; r - rata ploii nete; f_i - rata infiltraţiei.

Mişcarea din zona nesaturată este descrisă de ecuaţia:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]-\frac{\partial K(\theta)}{\partial z}+S_k(\theta) \qquad (10)$$

unde: θ - este conţinutul de umiditate; D(θ) – difuzibilitatea; K(θ) – permeabilitatea; S(θ) – reprezintă fie fluxul f_i prin suprafaţa solului în zona nesaturată, fie evaporaţia $E_{p.}$

Condiţiile la limită pe suprafaţa solului (z = 0) sunt:

$$\begin{aligned} r-E_p&=-K-D\frac{\partial\theta}{\partial z} && \text{pentru}\quad r-E_p<f_i \\ \theta&=\theta_{max} && \text{pentru}\quad f_i\le r-E_p \end{aligned} \qquad (11)$$

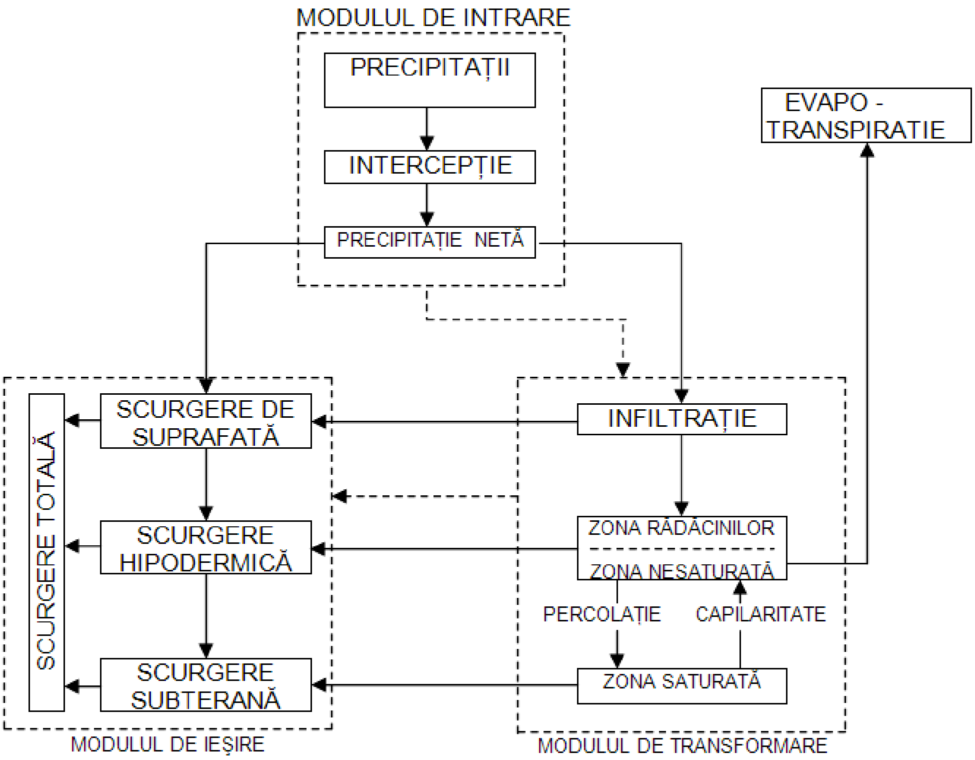

Fig. 6 Schema bloc a modelului hidrodinamic (după *Stanciu, 1988)*

Scurgerea de suprafaţă (hipodermică) se modelează prin analogie cu teoria difuziei. Pornind de la ecuaţia de continuitate şi de mişcare de tip Darcy, se obţine următoarea ecuaţie:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{D_0}{\gamma}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{C_0}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{C_0}{\gamma}\left(f_i - f_p\right)$$
$$C_0 = 3/2u_0 \qquad (12)$$
$$D_0 = h_0 u_0 / 2I_0$$

unde: h_0 şi u_0 reprezintă adâncimea şi viteza curgerii faţă de care se efectuează liniarizarea ecuaţiei;

q – debitul; f_i - infiltraţia; f_p – percolaţia; I_0 - panta stratului de sol.

Scurgerea subterană este obţinută prin integrarea ecuaţiei:

$$C(H)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(H)\frac{\partial H}{\partial z}\right] - \frac{\partial K(H)}{\partial z} + \varepsilon_i \qquad (13)$$
$$C(H) = \frac{\partial \theta}{\partial H}$$

unde: ε_i reprezintă percolaţia (f_p) din zona nesaturată (i = 1) sau schimbul prin capilaritate ($-f_p$) în zona nesaturată (i = 2); K(H) este conductivitatea hidraulică; H – nivelul apei; z – adâncimea apei.
Mişcarea apei în râu este descrisă prin ecuaţiile:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = r \cdot B + q - F \\ &Q = \frac{1}{n}\sqrt{I - \frac{\partial h}{\partial x}} R^{2/3} \Omega \end{aligned} \tag{14}$$

unde: Ω este aria secţiunii transversale corespunzătoare adâncimii h; Q este debitul care se scurge prin secţiune; r – rata ploii nete; B – lăţimea râului; q – debitul de pe versant; F – infiltraţia în malurile râului; n – coeficientul de rugozitate; R – raza hidraulică; I – panta albiei râului.

Domeniu de aplicabilitate:

- este aplicabil mai ales la versanţi şi bazine hidrografice mici
- modelul este unidimensional.

Modelul bidimensional al scurgerii de suprafaţă pe versanţi permeabili

Prima încercare de elaborare a modelului de formare a scurgerii, bazat pe ecuaţiile bidimensionale ale scurgerii pe versanţi, a fost făcută de Demidov şi Koren (1977), în ipoteza coincidenţei dintre cumpăna apelor de suprafaţă cu cea subterană, iar apele subterane hidraulic nu sunt legate de curgerea din albia râului. Pentru integrarea numerică a ecuaţiilor scurgerii pe versanţi şi a transportului de umiditate s-au folosit scheme cu diferenţe finite explicite. Pasul de integrare în spaţiu s-a luat egal cu 40 m, în adâncime de 0,1 m, iar în timp de la 120 la 600 s.

Kuciment şi Trubihin (1977) au propus modelul de formare a scurgerii bazat pe următorul sistemul de ecuaţii bidimensionale pentru scurgerea apei pe suprafaţa bazinului şi ecuaţia transportului vertical de umiditate [*Stanciu, 2002; Kuciment et al,1977; Şerban, 1995*]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = i - f = q \\ &q_x = u \cdot h, \quad q_y = v \cdot h \\ &\frac{\partial h}{\partial x} = S_{0x} - S_{fx}; \quad \frac{\partial h}{\partial y} = S_{0y} - S_{fy} \\ &\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta)\right], \quad f = \left[-D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta)\right]_{z=0} \end{aligned} \tag{15}$$

unde: h – adâncimea scurgerii; u, v – viteza apei pe direcţia x, respectiv y; θ – conţinutul de umiditate al solului; z – coordonata verticală; D(θ) – coeficientul de difuzie; K(θ) – conductivitatea hidraulică; i – intensitatea ploii; f – intensitatea infiltraţiei; q – ploaia netă; S_{0x}, S_{0y} – panta terenului în direcţia x, respectiv y; S_{fx}, S_{fy} – panta de frecare în direcţia x, respectiv y; t – timpul.

Considerînd legea Strickler – Manning pentru fiecare pantă de frecare, se pot scrie următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} u_h &= K_x \cdot I_x \cdot h^{5/3} \\ v_h &= K_y \cdot I_y \cdot h^{5/3} \end{aligned} \tag{16}$$

unde: I_x, I_y – panta suprafeţei apei pe direcţia x, respectiv y; K_x, K_y – echivalentul coeficientului de rugozitate Strickler.

Bazinul de recepţie a fost schematizat sub forma unei reţele dreptunghiulare, iar reţeaua de râuri prin canale cu aceeaşi lăţime (10 m). Mişcarea apei în canale s-a calculat după ecuaţiile undei cinematice pentru cazul unidimensional. Precipitaţiile şi nivelele apelor subterane s-au considerat aceleaşi pentru întregul bazin de recepţie. Coeficientul de difuzie şi conductivitatea hidraulică s-au calculat cu relaţiile:

$$\begin{aligned} D(\theta) &= D_0(\theta - 0{,}1)^2 \\ K(\theta) &= K_0(\theta - 0{,}1)^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Condiţiile la limită au fost luate de forma:

- la suprafaţa solului (z = 0):

$$\begin{aligned} &\theta(0,t) = -D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z} + K \,\Big|_{z=0} \quad \text{daca} \quad i < f \\ &\theta(0,t) = \theta_{max} \qquad\qquad \text{daca} \quad i > f \end{aligned} \tag{18}$$

- la limita inferioară a stratului de sol în care se produce scurgerea (z =1):

$$\theta(1,t) = \theta_{max} \tag{19}$$

Domeniu de aplicabilitate:

- descrie scurgerea de suprafaţă mai bine decât modelele unidimensionale
- necesită un volum de calcul mai mare decât modelele unidimensionale
- se bazează pe ipoteza că cumpăna apelor de suprafaţă coincide cu cea subterană, iar apele subterane hidraulic nu sunt legate de curgerea din albia râului
- se poate aplica în activitatea de elaborare a prognozelor hidrologice şi pentru determinarea parametrilor hidrologici necesari la proiectarea şi exploatarea lucrărilor hidrotehnice.

Modele prezentate mai sus sunt modele uni şi bidimensionale. Deoarece în studiul mişcării apei pe versanţi permeabili intervin o multitudine de factori a căror legi de variaţie sunt foarte diverse, încă nu a fost posibilă dezvoltarea unui model tridimensional care să redea cu o mare acurateţe acest fenomen.